

数学的な見方・考え方を働かせて問題解決に取り組む児童の育成

「変わり方」の指導 ～ 関数の考え ～

1. 「変わり方」の指導に焦点を当てて

「変わり方」は、第4学年から指導する。「変わり方」では、どんな数学的な見方・考え方を働かせるように指導するのだろうか。児童は、第4学年の「変わり方」で働かせた数学的な見方・考え方を、第5、6学年でどう生かして問題解決に取り組むのだろうか。よりよく数学的な見方・考え方を働かせるための授業や教材のあり方は、どうあるべきだろうか。

12 どんな学習がはじまるかな？

身のまわりには、一方の数が変わると、ともなうもう一方の数も変わるものがあります。

ともなうで変わる数を見つけよう！

④ たん生日が同じ姉と妹の年齢

3年後はー、
2年後はー、
1年後はー、

姉 13才
妹 10才

⑤ おかしの重さと代金

100円80円

おかしの重さと代金はー

⑥ 500mLのお茶の、飲んだ量と残りの量

飲んだ量が100mL、200mL、ーと変わると、残りの量はー

⑦ どんな変わり方をしているかな。何が変わると、それともなうで変わるかな。

52

【4年「変わり方」】

3 どんな学習がはじまるかな？

一方の量を変えると、ほかの量がどのように変わるかを考えています。

変わり方を調べよう！

② 周りの長さが16cmの長方形の、横の長さとなての長さ

③ ストローで正方形を横につなげた形を作るときの、正方形の数とストローの本数

④ たて4cm、横5cmの直方体の、高さと体積

⑤ 横の長さが増えると、たての長さは減るよ。

⑥ ⑤は、どんな変わり方をしているかな。

横の長さ (cm)	1	2	3	4
たての長さ (cm)	7	6	5	4

34

【5年「2つの量の変わり方」】

8 どんな学習がはじまるかな？

身のまわりには、ともなうで変わる量がいっぱいあります。

何が変わると、どう変わる？

② 妹の年齢が増えると、兄の年齢はー

③ 針金が長くなるとー

④ 面積が24cm²のままで、縦の長さが長くなるとー

24cm² → 24cm² → 24cm²

18

【6年「比例と反比例」】

本セミナーでは、第4学年と第5学年で指導する「変わり方」に焦点を当ててそれぞれ授業実践を行い、その中で見られた児童の数学的な見方・考え方と、それらを働かせて問題解決に取り組むための教材や授業のあり方などについて議論することで、テーマについて深めていくことを目的とする。

2. 「変わり方」では、何を指導するのか

そもそも、教科書単元にある「変わり方」では、何を指導するのだろうか。

学習指導要領上はC「変化と関係」領域に該当する。学習指導要領解説には、「C 変化と関係」領域について次のように解説されている。

「③変化や関係を把握する力の育成の重点化と統計教育の充実：数量関係領域の充実

従前の「数量関係」は、主として、関数の考え、式の表現と読み、及び資料の整理と読みの三つの下位領域からなるものであったが、今回の改訂により、従前の「数量関係」の内容を新たに設けた「変化と関係」と「データの活用」に移行した。これにより、数量の変化や関係に着目した考察を重視するとともに統計教育の基礎を充実することにした。

「変化と関係」の領域の新設については、算数科で育成を目指す資質・能力の重要な事項に、事象の変化や関係を捉えて問題解決に生かそうとすることがあり、これが従前から「関数の考え」として重視されてきたことを踏まえ、今回の改訂において、事象の変化や関係を捉える力の育成を一層重視し、二つの量の関係を考察したり、変化と対応から事象を考察したりする数学的活動を一層充実するために、従来の「数量関係」領域の考え方を生かすものとして、上学年に設けた。この領域の内容は、中学校数学の「関数」領域につながるものであり、小学校と中学校の学習の円滑な接続をも意図している。

なお、「変化と関係」領域を上学年に位置付けたのは、従来の「数量関係」の領域における「関数の考え」を育成する内容が、伴って変わる二つの数量の関係（第4学年）、簡単な比例（第5学年）、比例と反比例（第6学年）など、上学年に位置付けられていたことを踏まえたものである。しかしながら、下学年においても、数や図形の等の考察において、数の関係を考察したり、変化の規則に注目したりする場面が多いことに注意が必要であり、そのような場面は「関数の考え」の素地指導をする重要な機会である。（pp.40-41）」

変化や関係を把握する力の育成を重点化する目的から、従前の領域「数量関係」における第4学年「伴って変わる二つの数量の関係」、第5学年「簡単な比例」、第6学年「比例と反比例」など、上学年に位置付けられていた「関数の考え」を育成する内容を「C 変化と関係」として新しい領域が設けられ、中学校数学の領域「関数」への接続も意図した数量関係領域の充実が示されている。よって、**教科書単元「変わり方」は、中学校数学で指導される「関数」に向けた、小学校算数で「関数の考え」を育てるための内容**である。

では、「関数の考え」とは何か。学習指導要領解説には、次のように記されている。

「④事象の変化と数量の関係の把握

算数科の内容の重要な事項に、身の回りの事象の変化における数量間の関係を把握してそれを問題解決に生かすということがある。これが関数の考えである。問題解決において、ある数量を調べるためにそれと関係のある他の数量を見だし、それら二つの数量の間に成り立つ関係を把握してその問題を解決する際に用いられる方法である。それは次のような過程を経る。

- (a) 二つの数量や事象の間の依存関係を考察し、ある数量が他のどんな数量と関係付けられるのかを明らかにすること
- (b) 伴って変わる二つの数量について対応や変化の特徴を明らかにすること
- (c) 二つの数量の間の関係や変化の特徴を問題解決において利用すること

この関数の考えのよさは、二つの数量間の対応関係に気付き、それをを用いることによって、複雑な問題場面をより単純な数量関係に置き換えて考察し、より効率的かつ経済的に作業を行えるという点にある。また、身の回りの事象を理想化・単純化して、数学的に処理したり、問題場面の構造をより簡潔・明瞭・的確に捉えて問題を発展的に考察したりすることを可能にするよさもある。算数科では、具体的な関数としては、比例を中心に扱い、比例の理解を促すために反比例についても学習する。さらに、様々な事象における二つの数量の関係について、それらの数量の間に成り立つ比例関係を前提として乗法的な関係から把握される「割合」について学習する。割合は、二つの数量を比較するとき用いられる関係であり、またその関係を表現する数でもある。(p.35)」

身の回りの日常事象の例として、誕生日が同じ姉妹の年齢の場面と言えば、1年後、2年後、3年後…と変わっていく年齢の変化における姉妹の年齢の関係を把握することで、何年後の年齢でも把握することができる。姉と妹の年齢が、何年後であっても「3歳差」となって対応していることに気づき、それをを用いることによって単純に処理することができる。

姉と妹の年齢の関係を式に表すと、

$$(\text{姉の年齢}) - 3 = (\text{妹の年齢})$$

$$\square - 3 = \bigcirc$$

と、二つの数量の関係を単純な式で表すことができる。この対応関係を用いれば、ある年に姉が妹の年齢を知りたい場合、(自分の年齢) - 3 で妹の年齢を求めることができる。

「関数の考え」とは、このような身の回りの事象の変化における数量間の関係を把握して、それを問題解決に生かす目的で、問題解決において、ある数量を調べるためにそれと関係のある他の数量を見だし、それら二つの数量の間に成り立つ関係を把握してその問題を解決する際に用いられる方法であることが示されている。



3. 「変わり方」で働かせる数学的な見方・考え方とは、何か

学習指導要領解説における「C 変化と関係」領域で働かせる数学的な見方・考え方に着目した内容整理では、「①伴って変わる二つの数量の変化や対応の特徴を考察すること」の中で、関数の考えについて解説されている。

「関数の考え

事象の変化を捉えて問題解決に生かす資質・能力の中核となるのは、関数の考えである。関数の考えとは、数量や図形について取り扱う際に、それらの変化や対応の規則性に着目して、事象をよりよく理解したり、問題を解決したりすることである。この考えの特徴は、ある数量を調べようと

するときに、それと関係のある数量を見だし、それらの数量との間にある関係を把握して、問題解決に利用するところにある。関数の考えによって、伴って変わる二つの数量を見だし、それらの関係に着目し、変化や対応の特徴や傾向を考察できるようにする。また、関数の考えは、この領域にとどまることなく、全ての領域の内容を理解したり、活用したりする際に用いられる汎用性を有している。従って、関数の考えによって、数量や図形についての内容や方法をよりよく理解したり、それらを活用したりできるようにすることも大切である。関数の考えを生かしていくために、次のようなことに配慮することが大切である。第一に、ある場面での数量や図形についての事柄が、ほかのどんな事柄と関係するかに着目することである。例えば、ある数量が変化すれば、ほかの数量が変化するかどうか。ある数量が決まれば、ほかの数量が決まるかどうか。ある図形の要素などが決まれば、ほかの要素や事柄が決まるかどうか。そうした関係に着目することで、二つの事柄の間の依存関係を調べることができるようになる。これが、関数の考えの第一歩である。その際、考察の対象となる事柄の範囲を明確にすることも大切である。第二に、二つの事柄の変化や対応の特徴を調べていくことである。伴って変わる二つの数量の間には、変化や対応の規則性などの関係を見付けられることがある。その際、数量やその関係を言葉、数、式、図、表、グラフを用いて表すことで、そのように表現されたものから、さらに詳しく変化の様子や対応の規則性を読み取ることもできるようになる。第三に、上のようにして見いだした変化や対応の特徴を、様々な問題の解決に活用するとともに、その思考過程や結果を表現したり、説明したりすることである。ここでは、用いた方法や結果を見直し、必要に応じて、目的により適したものに改善することもある。関数の考えは、これら一連の過程を通して問題解決に生かされるものである。(pp.61-63)」

関数の考えを事象の変化をとらえて問題解決に生かす資質・能力の中核とし、「C 変化と関係」領域にとどまることなくすべての内容を理解したり活用したりする際に用いられる汎用性を有していることを示すとともに、関数の考えを問題解決に生かす一連の過程を解説している。

その上で、数学的な見方について、次のように解説している。

「伴って変わる二つの数量の関係に着目すること

これは、ある数量の大きさを知りたいとき、その数量を直接考察することが難しい場合などに、他の関係する数量に置き換えて考察できないかと考え、ある数量が他のどんな数量と関係が付けられるかを明らかにしていくことである。第4学年では、加法、減法、乗法、除法のいずれか一つの演算が用いられる具体的な場面において、伴って変わる二つの数量を見だし、それらの関係に着目する。求めたい数量の大きさに対して、その数量を直接調べにくいときなどに、それと関係のある他の数量を使って調べられないかと考えて、可能性のある数量を見だししていく。第5学年では、簡単な場合についての比例の関係や加法と乗法など二つの演算が必要な場面に関わって、伴って変わる二つの数量を見だし、それらの関係に着目する。第6学年では、日常の事象における伴って変わる二つの数量の関係に考察の対象を広げ、比例の関係にあるものを中心に、伴って変わる二つの数量を見だし、それらの関係に着目する。日常生活で、ある数量を直接調べるのが難しい場面において、調べやすく、かつ、その数量と比例の関係にあるとみることで別の数量を見いだす。厳密に考えれば誤差があり、比例の関係ではないことも考えられるが、比例の関係にあ

るとみることで、問題を解決する見通しをもつことができる。(p.61-63)」

数学的な見方の解説内容を学年ごとに、次の表のように整理した。

	第4学年	第5学年	第6学年
数学的な見方	伴って変わる二つの数量を見だし、それらの関係に着目する		
場面	加法, 減法, 乗法, 除法のいずれか一つの演算が用いられる具体的な場面において	簡単な場合についての比例の関係や加法と乗法など二つの演算が必要な場面において	日常の事象における伴って変わる二つの数量の関係に考察の対象を広げ, 比例の関係にあるものを中心に,
二つの数量を見出す	求めたい数量の大きさに対して, その数量を直接調べにくいときなどに, それと関係のある他の数量を使って調べられないかと考えて, 可能性のある数量を見いだしていく。		日常生活で, ある数量を直接調べることが難しい場面において, 調べやすく, かつ, その数量と比例の関係にあるとみることで別の数量を見いだす。 厳密に考えれば誤差があり, 比例の関係ではないことも考えられるが, 比例の関係にあるとみることで, 問題を解決する見通しをもつことができる。

伴って変わる二つの数量を見出し、それらの関係に着目する数学的な見方は、第4学年では、求めたい数量の大きさに対して、その数量を直接調べにくいときなどに、それと関係のある他の数量を使って調べられないかと考えて、可能性のある数量を見いだすことである。教科書で言えば、周りの長さが18cmの長方形が何種類できるかを求めるために、一つ一つ異なる形の長方形をつくっていくのが大変だから、形が異なる長方形から縦と横の長さを使って調べられないかと考え、できた長方形の縦と横の長さを記録していくこと(p.53)である。

第6学年では、考察対象を日常事象に広げ、ある数量を直接調べることが難しい場面において、調べやすく、かつ、その数量と比例の関係にあるとみることで別の数量を見いだすことである。教科書で言えば、画用紙の枚数を1枚ずつ数えて調べるのが難しい場面(p.125)において、枚数と比例関係にあるとみることで重さを見出すことである。

第4学年では一つの演算が用いられる場面において、第5学年では二つの演算が必要な場面において、第6学年では比例関係にあるものを中心にそれぞれ場面を設定することが示されている。

長さが18cmのひもを使って、いろいろな長方形が作れそうだね。

みなと

1 周りの長さが18cmの長方形は、何種類できるでしょうか。

1 長方形の横の長さとしたての長さには、どんな数の組があるか調べましょう。

はてな? 横とたての数には何かきまりがあるのかな。

かえで

2 横の長さとしたての長さの関係を、表に整理しましょう。

53

【第4学年 変わり方】

比例を使って

はるさんは、画用紙の枚数を調べようとしています。

1枚ずつ数えて調べるのは大変そう...

はてな? 全部の枚数を、簡単に調べることはできないのかな。

4 画用紙がたくさんあります。これを1枚ずつ数えずに、全部で何枚あるかを調べる方法を考えましょう。

枚数を数えるかわりに、ほかの量を調べて求められないかな。

枚数にもよって変わる量は...

問題をつむ 新しく考えることは何か。

みなと

かえで

1 はるさんは、画用紙が10枚、20枚、30枚のときの重さと、画用紙全部の重さを調べてみました。この結果から、画用紙全部の枚数を求めましょう。

自分の考えをもつ 今までに学習したどんなことが使えるかな。

画用紙の重さ	
10枚 ...	94g
20枚 ...	188g
30枚 ...	282g
?枚 ...	2444g

どうして10枚ずつ調べたのかな。

125

【第6学年 比例と反比例】

さらに、数学的な考え方について、次のように解説している。

「変化や対応の特徴を考察すること

これは、二つの数量の関係を、表や式、グラフを用いて表現し、また、読み取ることを通して、二つの数量の変化や対応の特徴を見いだしていくことである。第4学年では、変化の様子を表や式、折れ線グラフを用いて表したり、変化の特徴を読み取ったりする基礎的な技能を指導する。そして、表や式を用いて、一方が1ずつ増えたときに、他方が1ずつ減る、2ずつ増えるなどの変化の特徴や、和が一定、差が一定、一方を定数倍すると他方になるなどの対応の特徴を見いだす。第5学年では、簡単な場合について比例の関係を指導する。そして、簡単な場合についての比例の関係や加法と乗法など二つの演算が必要な場面に関わって、一方が2倍、3倍、...になると、他方も2倍、3倍、...になるなどの変化の特徴や、 $\square = 2 \times \triangle$ 、 $\square = 3 \times \triangle + 1$ などの式で表される対応の特徴を見いだす。第6学年では、比例の關係の意味や性質、また、比例の理解を促すために反比例を指導する。そして、比例の關係を用いて問題を解決する場面において、目的に応じて表や式、グラフを用いて、伴って変わる二つの数量の關係を表現して、比例の關係についての變化や対応の特徴を見いだす。(p.61-63)」

数学的な考え方の解説内容を学年ごとに、次の表のように整理した。

	第4学年	第5学年	第6学年
数学的な考え方	変化や対応の特徴を考察する		
指導すること	変化の様子を表や式、折れ線グラフを用いて表したり、変化の特徴を読み取ったりする基礎的な技能	簡単な場合について比例の関係	比例の関係の意味や性質、また、比例の理解を促すために反比例
変化の特徴	表や式を用いて、一方が1ずつ増えたときに、他方が1ずつ減る、2ずつ増えるなど	一方が2倍、3倍、…になると、他方も2倍、3倍、…になるなど	比例の関係を用いて問題を解決する場面において、目的に応じて表や式、グラフを用いて、伴って変わる二つの数量の関係を表現して、比例の関係についての変化や対応の特徴を見いだす。
対応の特徴	和が一定、差が一定、一方を定数倍すると他方になるなど	$\square = 2 \times \triangle$, $\square = 3 \times \triangle + 1$ などの式で表される	

考察する変化や対応の特徴は、第4学年で変化の様子を表したり読み取ったりする基礎的な技能を、第5学年では簡単な場合について比例の関係を、第6学年では比例の理解を促す反比例をそれぞれ指導することが明記されている。その中で、その学年に応じた場面の変化や対応の特徴を見出していくことが示されている。

12 変わり方

横の長さ (cm) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8
たての長さ (cm) | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1

横の長さが1cm, 2cm, …とふえると、たての長さはどのように変わるでしょうか。

横がかわれば、たても変わる。

横の長さとたての長さをたした数は、どのようになっているでしょうか。

横とたてが変わっても、その和は変わらない。

横の長さとたての長さの関係を、式に表しましょう。

横の長さ + たての長さ = □

横の長さを○cm、たての長さを△cmとすると、上の式は、次のように表すことができます。

$\text{○} + \text{△} = 9$

横の長さ + たての長さ = 9

○や△に、横の長さの数やたての長さの数をあてはめてみよう。

○ + △ = 9

【4年「変わり方」】

3 2つの量の変わり方

かえでさんは、高さや体積の関係について、次のようなきまりに気がつきました。このきまりについて、くわしく調べましょう。

高さが2倍になると、体積も2倍になります。

高さ (cm)	1	2	3	4	5	6
体積 (cm ³)	20	40	60	80	100	120

2倍の場合だけでなく、高さが3倍になると、体積も3倍になります。

高さ (cm)	1	2	3	4	5	6
体積 (cm ³)	20	40	60	80	100	120

表のほかのところで調べてみましょう。

高さ (cm)	1	2	3	4	5	6
体積 (cm ³)	20	40	60	80	100	120

2倍

3倍

2倍

たてと横の長さが決まっているとき、直方体の体積は高さに比例するといえます。

③の正方形の数とストローの本数の関係は、比例するといえるかな。

正方形の数	1	2	3	4	5	6
ストローの本数	4	7	10	13	16	19

一方の横が2倍になると…

横	1	2	3	4	5	6
縦	4	7	10	13	16	19

【5年「2つの量の変わり方」】

8 比例と反比例

比例

時間が2倍、3倍、4倍、…になると、水の深さも2倍、3倍、4倍、…になる。

時間 (分)	1	2	3	4	5	6
水の深さ (cm)	2	4	6	8	10	12

だから、水の深さは時間に□□します。

水の深さは時間に□□します。

水の深さは時間に□□します。

水を入れる時間が $\frac{1}{2}$ 倍、 $\frac{1}{3}$ 倍、 $\frac{1}{4}$ 倍、…になると、それにもなって水の深さはどのように変わってでしょうか。

時間 (分)	1	2	3	4	5	6
水の深さ (cm)	2	4	6	8	10	12

【6年「比例と反比例」】

4. 数学的な見方・考え方を働かせて問題解決に取り組む授業づくり

「変わり方」の指導では、中学校数学で指導される「関数」に向けた「関数の考え」を育てることが目標となる。

「関数の考え」とは、身の回りの事象の変化における数量間の関係を把握して、それを問題解決に生かす目的で、問題解決において、ある数量を調べるためにそれと関係のある他の数量を見だし、それら二つの数量の間に成り立つ関係を把握してその問題を解決する際に用いられる方法である。関数の考えは、事象の変化をとらえて問題解決に生かす資質・能力の中核を成し、「C 変化と関係」領域にとどまることなくすべての内容を理解したり活用したりする際に用いられる汎用性を有している。

第4学年、第5学年においては、求めたい数量の大きさに対して、その数量を直接調べにくいときなどに、それと関係のある他の数量を使って調べられないかと考えて、可能性のある数量を見だし、数学的な見方を働かせ、それらの変化の様子を表や式に表すことで変化や対応の特徴を見だし、数学的な考え方を働かせて問題解決に取り組む授業を目指す。

授業づくりの視点 関数の考えを育てる

求めたい数量の大きさに対して、その数量を直接調べにくいときなどに、

それと関係のある他の数量を使って調べられないかと考えて、

可能性のある数量を見だし、(数学的な見方を働かせる)

それらの変化の様子を表や式に表すことで

変化や対応の特徴を見だし、(数学的な考え方を働かせる)

問題解決に取り組む授業

第4学年 加法、減法、乗法、除法のいずれか一つの演算が用いられる

具体的な場面 ($\square + \triangle = 3$, など)

第5学年 加法と乗法など二つの演算が必要な場面 ($\square = 3 \times \triangle + 1$, など)